

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

*Angelo Favini*

**EQUAZIONI PARABOLICHE DEGENERI  
DEL SECONDO ORDINE**

5 marzo 1992

**1.Introduzione e preliminari.** In questo seminario esporrò alcuni risultati su equazioni differenziali del secondo ordine in uno spazio di Banach, del tipo

$$(1) \quad \frac{d}{dt} (Cu') + Bu' + Au = f,$$

ottenuti molto recentemente in collaborazione con A.Yagi (Himeji, Giappone).

Per rendere più chiara l'esposizione, credo sia utile richiamare vari precedenti risultati dei lavori [FY 1,2].

Sia  $A$  una trasformazione lineare *multivoca* nello spazio di Banach complesso  $X$ .

Data  $f$  continua da  $[0, T]$  in  $X$  e dato  $v_0 \in D(A)$ , cerchiamo una funzione  $v: [0, T] \rightarrow X$  tale che, se

$$dv(t)/dt = v'(t),$$

allora

$$(P) \quad \begin{cases} v'(t) + Av(t) \ni f(t), & 0 < t \leq T, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Su  $A$  facciamo le seguenti assunzioni:

$$(a) \quad \rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : \exists (z+A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\} \supseteq \\ \supseteq \Sigma = \{z : \operatorname{Re} z \geq -c(1+|z|)^\eta\}, \quad c > 0,$$

$$(b) \quad \|(z+A)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq M(1+|z|)^{-\beta}, \quad z \in \Sigma,$$

dove

$$0 < \beta \leq \eta \leq 1.$$

Precisiamo cosa si intende per soluzione del problema (P).

**Definizione 1.** Diciamo che  $v: [0, T] \rightarrow X$  è una soluzione CLÁSSICA di (P) se  $v \in C^1((0, T]; X)$ ,  $v(t) \in D(A)$ ,  $0 < t \leq T$ , e vale (P).

Si ha ([FY1]):

**Proposizione 1.** Valgano (a), (b) e sia

$$2\eta + \beta > 2.$$

Se

$$(2 - \eta - \beta)/\eta < \sigma \leq 1$$

e  $v_0 \in D(A)$ , allora per ogni  $f \in C^\sigma([0, T]; X)$ , il problema (P) ha una unica soluzione classica.

La Proposizione 1 ha una immediata applicazione a problemi di Cauchy degeneri, come subito vediamo.

Siano  $L, M$  due operatori lineari chiusi da  $Y$  in  $X$ , dove  $X, Y$  sono spazi di Banach,  $D(L) \subseteq D(M)$ ,  $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ , (cosicchè  $ML^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ ),  $f: [0, T] \rightarrow X$  continua,  $u_0 \in D(L)$ .

Diciamo che  $u: (0, T] \rightarrow Y$  è una soluzione CLASSICA del problema

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ Mu(0) = Mu_0, \end{cases}$$

se  $u(t) \in \mathcal{D}(L)$  per ogni  $t \in (0, T]$ ,  $Mu \in C^1((0, T]; X)$ ,  $Lu \in C((0, T]; X)$  e vale (E), dove la condizione iniziale va intesa nel senso

$$\lim_{t \downarrow 0} \|M[u(t) - u_0]; X\| = 0.$$

In virtù della Proposizione 1, abbiamo ([F Y 1])

**Proposizione 2.** *Assumiamo*

- (a)'  $\{z: zM + L \text{ ha inverso limitato}\} \supseteq$   
 $\supseteq \Sigma_\eta = \{z: \operatorname{Re} z \geq -c(1 + |\operatorname{Im} z|)^\eta\}$ , con  $c > 0$ ,
- (b)'  $\|M(zM + L)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq C(1 + |z|)^{-\beta}$ ,

dove  $z \in \Sigma_\eta$ ,  $0 < \beta \leq \eta \leq 1$ .

Se  $2\eta + \beta > 2$  e  $(2 - \eta - \beta)/\eta < \sigma \leq 1$ , per ogni  $f \in C^\sigma([0, T]; X)$  e ogni  $u_0 \in D(L)$ , il problema (E) ha una ed una sola soluzione classica.

Maggiori informazioni sulla regolarità della soluzione  $u$  di (E) possono essere ottenute quando  $\eta = 1$ .

A tale fine, premettiamo la

**Definizione 2.** *La funzione  $u: [0, T] \rightarrow Y$  è una soluzione STRETTA di (E) se  $u(t) \in D(L)$  per  $0 \leq t \leq T$ ,  $Lu \in C([0, T]; X)$ ,  $Mu \in C^1([0, T]; X)$  e vale*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ Mu(0) = Mu_0. \end{cases}$$

Nel lavoro [F Y2] è stata dimostrata la seguente affermazione.

**Proposizione 3.** *Assumiamo (a)', (b)',  $\eta = 1$ . Allora, dati  $\sigma \in (1 - \beta, 1)$ ,*

*$f \in C^\sigma([0, T]; X)$ ,  $u_0 \in D(L)$ , soddisfacenti la condizione di compatibilità*

$$f(0) - Lu_0 \in \operatorname{imm}(ML^{-1}),$$

*c'è una unica soluzione stretta di (E) tale che*

$$Lu(\cdot), \frac{d}{dt}Mu(\cdot) \in C^{\alpha+\beta-1}([0,T];X).$$

Nel paragrafo 2 vengono esposti risultati di esistenza per la (1) nel caso più semplice che  $D(B) \subseteq D(A)$ . Questi permettono di trattare vari problemi di Cauchy-Dirichlet, ottenendone soluzioni più regolari di quelli generalmente noti in letteratura: il riferimento è principalmente [CS].

Utilizzando e sviluppando un'idea di S.Yu.Yakubov [Y] (vedi anche [K]) trattiamo nel paragrafo 3 il caso più complicato  $D(A) \subseteq D(B)$ .

Diamo infine una condizione sufficiente a garantire l'applicabilità dei risultati ottenuti, verificata in un esempio concreto di equazione alle derivate parziali.

## 2.L'equazione (1) nel caso $D(B) \subseteq D(A)$ .

Consideriamo il problema

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Cu') + Bu' + Au = f = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \\ Cu'(0) = Cu_1, \end{cases}$$

sotto la seguente ipotesi sugli operatori A,B,C :

$$(3) \quad \begin{cases} A, B, C \text{ sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach complesso } X \text{ in } \mathbb{C} \\ D(B) \subseteq D(C), D(B) \subseteq D(A). \end{cases}$$

Posto  $u' = v$ ,

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix},$$

si considerano M ed L come operatori nello spazio  $D(B) \times X$ , dove  $D(B)$  è munito della norma del grafico.

In virtù delle ulteriori ipotesi che faremo, non è restrittivo supporre anche che B abbia inverso limitato.

Il problema (2) viene allora tradotto in

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mz(t)) + Lz(t) = F(t), & 0 < t \leq T, \\ Mz(0) = Mz_0, \end{cases}$$

dove  $z(t) = (u(t), v(t))$ ,  $z_0 = (u_0, u_1)$ ,  $F(t) = (0, f(t))$ ,  $0 < t \leq T$ .

Intendiamo applicare la Proposizione 2 e la Proposizione 3. A tale fine introduciamo il fascio operatoriale

$$P(z) = z^2C + zB + A, \quad z \text{ complesso,}$$

ed osserviamo che, formalmente,

$$P(z) = (z + AB^{-1})(zC + B) - zAB^{-1}C = (z + AB^{-1})Q(z)(zC + B),$$

dove

$$Q(z) = I - z(z + AB^{-1})^{-1}AB^{-1}C(zC + B)^{-1}.$$

Ciò premesso, appare chiaro il tipo di assunzioni che faremo sugli operatori A, B e C:

$$(5) \quad \begin{cases} zC + B \text{ ha inverso limitato per ogni } z \in \Sigma_{\eta}, \\ \|C(zC + B)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k(1 + |z|)^{-\beta}, z \in \Sigma_{\eta}, \\ \text{con } 0 < \beta \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

In virtù della (3), della (5) e della espressione precedentemente ottenuta per P(z), non è difficile riconoscere che

$$\|M(zM + L)^{-1}; \mathcal{L}(D(B) \times X)\| \leq k'(1 + |z|)^{-\beta}, z \in \Sigma_{\eta},$$

con k' una opportuna costante positiva.

In modo del tutto analogo per equazioni del primo ordine si introducono le definizioni di soluzione CLASSICA e STRETTA di (2). Si ha:

**Teorema 1.** Valgano le ipotesi (3) e (5).

Se  $u_0, u_1 \in D(B)$  e  $f \in C^{\alpha}([0, T]; X)$ , dove

$$2\eta + \beta > 2, (2 - \eta - \beta) / \beta < \sigma \leq 1,$$

allora il problema (2) ha una unica soluzione classica u, con

$$u' \in C((0, T]; D(B)), Cu' \in C^1((0, T]; X), Au \in C((0, T]; X).$$

**Teorema 2.** Supposto (3) e (5) soddisfatte con  $\eta = 1$ , sia  $1 - \beta < \sigma < 1$ .

Se  $u_0, u_1 \in D(B)$ ,  $f \in C^{\alpha}([0, T]; X)$  e vale

$$f(0) - Au_0 - Bu_1 \in C(D(B)),$$

allora il problema (2) ha una unica soluzione stretta u tale che

$$Bu' \text{ e } \frac{d}{dt}(Cu') \in C^{\sigma+\beta-1}([0, T]; X).$$

Diamo di seguito due esempi di applicazione dei Teoremi 1 e 2.

**Esempio 1.** Consideriamo il problema:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( m(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f, & \text{in } (0, T] \times \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{in } (0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ m(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \rightarrow m(x) u_1(x) & \text{per } t \rightarrow 0+, x \in \Omega, \end{cases}$$

dove  $\Omega$  è un dominio limitato di  $R^n$  con frontiera  $\partial\Omega$  regolare,  $n \geq 1$ , e  $m \in L^\infty(\Omega)$  è non negativa su  $\Omega$ .

Problemi del tipo (6) sono stati molto studiati, (vedi per riferimenti [CS]).

Di solito si lavora nello spazio  $H^{-1}(\Omega)$ , perchè in tale spazio le stime per il risolvibile (modificato) degli operatori che figurano nell'equazione sono quelle ottimali, cioè  $\eta = \beta = 1$ .

Se si vuole trattare (6) nell'ambiente più naturale e regolare  $X = L^2(\Omega)$ , si prende

$$D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad B = -\Delta,$$

$C =$  moltiplicazione per  $m(x)$ .

Si vede ([FY 1]) che allora

$$\|C(zC+B)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k |z|^{-1/2}, \quad z \neq 0, \quad z \in \Sigma_1.$$

Inoltre, se  $m \in C^1(\bar{\Omega})$  e

$$|\nabla m(x)| \leq C m(x)^\rho,$$

con  $0 < \rho \leq 1$ , allora la stima migliore

$$\|C(zC+B)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k |z|^{-\gamma}, \quad z \neq 0, \quad z \in \Sigma_1,$$

con  $\gamma = (2 - \rho)^{-1}$ , è soddisfatta.

**Esempio 2.** Per semplicità, ci limiteremo a considerare il caso  $n = 1$ .

Sia  $\Omega = (0,1)$  e sia  $C_0 > 0$ . Il problema è

$$(7) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( m(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f = f(t,x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0, & 0 < t \leq T, \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t,x) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ \lim_{t \rightarrow 0} m(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = m(x) u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Questa volta prendiamo  $X = L^p(0,1)$ ,  $1 < p < \infty$ ,

$$D(B) = W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1), (Bu)(x) = -u''(x) + C_0 u(x), u \in D(B),$$

$$m \in L^\infty(0,1), \quad m(x) \geq 0.$$

In virtù dei risultati di [FY2], si ha

$$\|C(zC + B)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k|z|^{-1/p}, \quad z \neq 0, \quad z \in \Sigma_1.$$

Così, anche (7) può essere trattato per mezzo dei precedenti Teoremi.

## 2. Il caso $D(A) \subset D(B)$ .

Per trattare il problema (2) nel caso in cui  $D(A) \subset D(B)$ , estenderemo il metodo di [K,Y], cf. [F,FO], relativo a  $C =$  operatore identità. Sostanzialmente, l'idea è di "triangolarizzare" la matrice di trasformazioni, in generale multivoche,  $LM^{-1}$ , ed è stata ampiamente utilizzata in varie questioni di teoria degli operatori, per cui rimandiamo, per esempio, a [R].

Osserviamo che (2) può essere equivalentemente formulato nello spazio  $X \times X$  come

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, & 0 < t \leq T, \\ \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Poichè vogliamo applicare a (8) la Proposizione 1, dobbiamo vedere  $C^{-1}$  come una applicazione multivoche, in generale. Posto

$$AB^{-1} = U, \quad BC^{-1} = V,$$

cosicchè

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & -U \\ U & -U+V \end{bmatrix} = \mathcal{Q},$$

dobbiamo considerare il risolvente  $(\mathcal{Q} + z)^{-1}$ ,  $z$  complesso.

Denotiamo con  $\Sigma'_\eta$  l'insieme

$$\Sigma'_\eta = \{z; \operatorname{Re} z \geq -c'(1 + |\operatorname{Im} z|)^\eta\}, \quad c' > 0, \quad 0 < \eta \leq 1.$$

Formuliamo allora le seguenti assunzioni relative agli operatori A,B,C:

$$(a)'' \quad \|C(zC + B)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k(1 + |z|)^{-\beta}, \quad z \in \Sigma'_\eta, \quad 0 < \beta \leq \eta \leq 1,$$

$$(b)'' \quad \|B(zB + A)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k(1 + |z|)^{-\alpha}, \quad z \in \Sigma'_\eta, \quad 0 < \alpha \leq \eta \leq 1,$$

$$(c)'' \quad D(V) (=D(BC^{-1})) \subset D(U) = D(AB^{-1}) \quad \text{e } c' \text{ è una costante positiva } \delta \text{ tale che}$$

$$\|U(z + V)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k|z|^{-\delta}, \quad \text{per ogni } z \in \Sigma'_\eta, \quad |z| \text{ grande.}$$

Per i nostri scopi non è restrittivo supporre  $\eta \leq \eta'$  e  $c = c'$ , come faremo.

Si dimostrano allora i seguenti

**Teorema 3.** Assumiamo (a)", (b)", (c)",  $\eta \leq \eta'$  e  
 $\alpha + \delta, \alpha + \beta > 1, 2\eta + \alpha + \beta > 3.$

Se

$$(3 - \eta - \alpha - \beta) / \eta < \sigma \leq 1,$$

allora per ogni  $u_0 \in D(A), u_1 \in D(B)$  e  $f \in C^\sigma([0, T]; X)$ , il problema (2) ha una soluzione classica.

**Teorema 4.** Valgano (a)", (b)", (c)",  $\eta = \eta' = 1$ , e  
 $0 < \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta, \alpha + \delta > 1, 2 - \alpha - \beta < \sigma < 1.$

Allora per ogni  $u_0, u_1 \in D(A)$  e  $f \in C^\sigma([0, T]; X)$  soddisfacenti

$$f(0) - Au_0 - Bu_1 \in C(D(B)),$$

esiste una soluzione stretta  $u$  di (2), con

$$Au, Bu', (Cu') \in C^{\sigma + \alpha + \beta - 2}([0, T]; X).$$

E' chiaro che la condizione veramente restrittiva è data dalla ipotesi (c)", che comporta una forte connessione tra gli operatori.

Il risultato successivo fornisce un criterio (piuttosto semplice e spesso utilizzabile nelle equazioni alle derivate parziali) per il suo verificarsi.

**Teorema 5.** Supponiamo valgano (a)", (b)". Inoltre,

- i)  $D(B)$  è invariante per l'operatore  $C$ ,
- ii)  $\|BCu; X\| \leq k \|Bu; X\|$  per ogni  $u \in D(B)$ , essendo  $k$  una costante  $> 0$ ,
- iii)  $B$  è un operatore positivo con potenze immaginarie limitate e  $\|B^{is}; \mathcal{L}(X)\| \leq \text{Costante}$  per  $|s| \leq \rho$ , dove  $\rho > 0$  opportuno,
- iv) esiste  $\tau \in (0, 1)$  tale che

$$D(B^{1+\tau}) \subseteq D(A)$$

e

$$\|Au; X\| \leq k' \|B^{1+\tau}u; X\|, u \in D(B^{1+\tau}), k' > 0.$$

Allora, se  $0 < \tau < \beta$ , la condizione (c)" è soddisfatta.

*Dimostrazione.* La ii) garantisce che

$$\|B(z + BC^{-1})^{-1}f; X\| = \|BC(zC + B)^{-1}f; X\| \leq k \|B(zC + B)^{-1}f; X\| \leq$$



$$\leq k_1(1 + |z|^{1-\beta})\|f; X\|, \quad z \in \Sigma_\eta, \quad f \in X.$$

E' ben noto [T, p.103] che, in virtù della iii), per ogni  $\theta \in (0,1)$   $D(B^\theta)$  coincide con lo spazio di interpolazione complessa  $[X, D(B)]_\theta$ , e così

$$\begin{aligned} \|C(zC + B)^{-1}; L(X; D(B^\tau))\| &= \|(z + BC^{-1})^{-1}; L(X; D(B^\tau))\| \leq \\ &\leq k''|z|^{-(\beta-\tau)}, \quad z \in \Sigma, \quad |z| \text{ grande. } \# \end{aligned}$$

**Esempio 3.** Per semplicità, ci limitiamo a considerare come  $\Omega$  l'intervallo aperto limitato  $I = (a,b)$  di  $\mathbb{R}$ .

Estensioni ad  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , sono possibili e anche in spazi  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < +\infty$ , in forza dei risultati di R.de Laubenfels [deL].

Sia  $X = L^2(I)$  e denotiamo con  $C$  l'operatore di moltiplicazione per  $m(x)$  nello spazio  $X$ , dove  $m(\cdot)$  è una funzione non negativa su  $\bar{I}$  e sufficientemente regolare.

Sia  $K: X \rightarrow X$  l'operatore definito da

$$D(K) = H^2(I) \cap H_0^1(I), \quad Ku = -u'', \quad u \in D(K).$$

Allora

$$A = K^{m+q}, \quad B = K^m, \quad m, q \in \mathbb{N}, \quad q < m.$$

Utilizzando le condizioni ai limiti soddisfatte dagli elementi di  $D(B)$ , si riconosce che vale (a)", con  $\beta = 1/2$  ed  $\eta = 1$ .

Inoltre, anche (b)" è verificata con  $\alpha = \eta' = 1$ .

Per applicare il Teorema 5 dovremo assumere una maggiore regolarità alla funzione  $m(\cdot)$ ; precisamente,

$$m(\cdot) \in C^{(2m)}(\bar{I}) \text{ e } m^{(2j+1)}(a) = m^{(2j+1)}(b) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Allora le assunzioni i), ii) del Teorema 5 sono soddisfatte.

D'altra parte è noto che vale iii) ed anche iv) è valida con  $\tau = q/m$ .

Pertanto, se  $2q < m$ , i Teoremi 3 e 4 si applicano.

E' pertanto possibile trattare il problema di Cauchy-Dirichlet corrispondente, connesso con l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(x)\frac{\partial u}{\partial t}) + (-1)^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^{m+q} \frac{\partial^{2(m+q)} u}{\partial x^{2(m+q)}} = f(t,x), \quad 0 < t \leq T, \quad a < x < b.$$

**Bibliografia**

- [CS] R.W.Carroll-R.E.Showalter, "Singular and Degenerate Cauchy Problems", ed. Academic Press, 1976.
- [deL] R.de Laubenfels, *Powers of generators of holomorphic semigroups*, Proceed. AMS 99(1987), 105-108.
- [F] A.Favini, *Parabolicity of second order differential equations in Hilbert space*, Semigroup Forum 42(1991), 303-312.
- [FO] A.Favini-E.Obrecht, *Conditions for parabolicity of second order abstract differential equations*, Diff.&Int.Eqs.4(1991), 1005-1022.
- [FY1] A.Favini-A.Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution problems*, in corso di stampa su "Annali Mat.Pura Appl."
- [FY2] A.Favini-A.Yagi, *Space and time regularity for degenerate evolution equations*, in corso di stampa su "J.Japan Math.Soc."
- [K] S.G.Krein, "Linear Differential Equations in Banach Space", ed.AMS, 1971.
- [R] L.Rodman, "An Introduction to Operator Polynomials", ed. Birkhäuser, 1989.
- [T] H.Triebel, "Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators", ed. North-Holland, 1978.
- [Y] S.Ya.Yakubov, *A nonlocal boundary value problem for a class of Petrovskii well posed equations*, Math.Sb.(N.S.), 118(60),(1982), 252-261; Math.USSR-SB, 46(1983), 255-265.